TD 39 : Espaces préhilbertiens

Produit scalaire et norme

Exercice 1. On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\quad \forall f,g \in E \quad \langle f \mid g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$
Montrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

Exercice 2 (*Règle du parallélogramme*)**.** Soit E un espace préhilbertien réel.

1) Soit $||\cdot||$ une norme euclidienne sur E. Montrer que : $\quad \forall x,y \in E \quad ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$
2) $(*)$ Réciproquement, montrer que si $||\cdot||$ est une norme sur E qui vérifie l'assertion ci-dessus, alors il s'agit d'une norme euclidienne.
3) Sur $E = \mathbb{R}^n$, on définit $\quad ||x||_\infty := \sup_{1\leq i\leq n} |x_i| \quad$ Montrer que $||\cdot||_\infty$ est une norme sur E qui n'est pas euclidienne.

Exercice 3. Soit E un espace préhilbertien réel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\forall x,y \in E \quad (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$ avec $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire sur E
- $\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\|$ avec $||\cdot||$ la norme euclidienne associée à $(\cdot \mid \cdot)$

Exercice 4 (**Classique !**)**.** Soit $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^n x_k^2$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?
Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 6. On pose $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(A,B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$$

est un produit scalaire sur E. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\quad \mathrm{tr}(A^2) \leq \mathrm{tr}(A^\top A)$

Orthogonalité, supplémentaire orthogonal

Exercice 7. Déterminer $F^\perp$ dans chacun des cas suivants :

1) $F = \mathrm{Vect}((2,1,3),(1,7,-1))$
2) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\right\}$
3) $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z+t = 0, \quad x+2y+3z+t = 0\right\}$

Exercice 8. Soit E un espace euclidien et F,G deux s.e.v. de E. Montrer que

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad \text{et} \qquad F^\perp + G^\perp = (F\cap G)^\perp$$

Exercice 9. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère le produit scalaire φ sur E défini par :

$$\forall A, B \in E \qquad \varphi(A,B) = \operatorname{tr}(A^\top B)$$

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques. Montrer que $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
On pourra utiliser le fait que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sans démonstration.

Exercice 10. Soit ℓ^2 l'e.v. des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < \infty$. Pour tous $u, v \in \ell^2$, on définit :

$$(u \mid v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

1) Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ définit un produit scalaire sur ℓ^2.
2) On note F le s.e.v. des suites presque nulles, i.e. des suites qui s'annulent à partir d'un certain rang.
   (a) Quelle est la dimension de F ?
   (b) Montrer que $F^\perp = \{0_{\ell^2}\}$. En déduire que $F \neq (F^\perp)^\perp$.
   (c) Montrer que F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires.

Bases orthonormées

Exercice 11. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$$

1) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée de E.
2) Déterminer les composantes des vecteurs $x = (3,-2,7)$ et $y = (4,1,-5)$ selon cette base.
3) Soit $v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur α, β, γ est-ce que $\|v\| = 1$?

Exercice 12. Orthonormaliser les bases de E suivantes :

1) Dans $E = \mathbb{R}^2$, la base (e_1, e_2) avec $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (0,1)$.
2) Dans $E = \mathbb{R}^3$, la base (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (1,1,-1)$, $e_2 = (1,-1,1)$ et $e_3 = (-1,1,1)$.
3) Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, la base $(1, X, X^2)$ selon le produit scalaire $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ (polyn. de Legendre)

Projections orthogonales

Exercice 13. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\forall P, Q \in E \qquad (P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

1) Déterminer une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
2) Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur F. En déduire $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 14. Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2\, dx$. *Indication : reformuler le problème comme un calcul de la distance de la fonction $x \mapsto x$ à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,2\pi], \mathbb{R})$.*

Exercice 15. Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit p un projecteur de E.
Montrer que $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Ker} p$ (i.e. p est un projecteur orthogonal) si et seulement si $\forall x, y \in E \qquad \langle p(x) \mid y \rangle = \langle x \mid p(y) \rangle$